2. Παράγωγος

2.1 Παράγωγος

Η *παράγωγος* της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x ορίζεται ως

$$\frac{df}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ . \tag{2.1}$$

Παράγωγοι *ανώτερης τάξης* ορίζονται με τον ίδιο τρόπο. Για παράδειγμα,

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \equiv \frac{df'}{dx} \equiv f''(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \ . \tag{2.2}$$

Για τους *τελεστές παραγώγισης* χρησιμοποιούνται τα σύμβολα $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}, \ldots$ και $D \equiv \frac{d}{dx}$, $D^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2}, \ldots$ και οι παράγωγοι συμβολίζονται ως y', y'', $y''', \ldots$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}, \ldots$, ή και ως $Dy,\ D^2 y, \ldots$ Στη Φυσική χρησιμοποιείται επίσης και ο *συμβολισμός του Νεύτωνα*, στον οποίο μια τελεία πάνω από ένα σύμβολο υποδηλώνει παραγώγιση ως προς τον χρόνο: $\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} \equiv \frac{d^2 y}{dt^2}$, $\dot{\vec{\mathbf{r}}} \equiv \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$.

2.2 Κανόνες παραγώγισης

Αν οι $f,\ g,\ u$ και υ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύουν οι εξής κανόνες παραγώγισης:

1. $$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} = f'(x) + g'(x) \ . \tag{2.3}$$

2. $$\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = \frac{df}{dx} g + f \frac{dg}{dx} = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \ . \tag{2.4}$$

3. $$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{\frac{df}{dx} g - f \frac{dg}{dx}}{g^2} = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0 \ . \tag{2.5}$$

4. Αν $f = f(u)$ και $u = u(x)$, τότε $$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx} = f'(u)\,u'(x) \ . \tag{2.6}$$

   Αν $f = f(u)$, $u = u(\upsilon)$ και $\upsilon = \upsilon(x)$, τότε $$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{d\upsilon}\frac{d\upsilon}{dx} \ . \tag{2.7}$$

5. Αν $y = f(x)$, και $x \equiv f^{-1}(y)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση, τότε $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \quad \text{και} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \ . \tag{2.8}$$

6. Αν είναι $x = f(t)$ και $y = g(t)$, τότε $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \ . \tag{2.9}$$

Παραδείγματα 1-6

1. $\dfrac{d}{dx}[x^2+\sin x]=\dfrac{d}{dx}x^2+\dfrac{d}{dx}\sin x=2x+\cos x$.

2. $\dfrac{d}{dx}(e^x\sin x)=\sin x\dfrac{d}{dx}e^x+e^x\dfrac{d}{dx}\sin x=e^x\sin x+e^x\cos x$.

3. $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\sin x}{x}\right\}=\dfrac{x\dfrac{d}{dx}\sin x-\sin x\dfrac{d}{dx}x}{x^2}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

4. Αν $f=\sin u$ και $u=x^2$, τότε $\dfrac{df}{dx}=\dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dx}=\cos u\ (2x)=2x\cos(x^2)$.

   Αν $f=\sin u$, $u=e^{\upsilon}$ και $\upsilon=x^2$, τότε

   $$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{d\upsilon}\frac{d\upsilon}{dx}=\cos u\ e^{\upsilon}\ (2x)=2x\,e^{x^2}\ \cos(e^{x^2})\ .$$

5. Αν $y=\sin x$, και $x=\sin^{-1}y$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση, τότε

   $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{dy/dx}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-y^2}}\ .$$

6. Αν είναι $x=\sin t$ και $y=\cos t$, τότε $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t$.

2.3 Η εύρεση των μέγιστων και ελάχιστων μιας συνάρτησης

Αν στο σημείο $x=x_0$ είναι $f'(x_0)=0$, και $f''(x_0)\neq 0$, τότε η συνάρτηση $f(x)$:

Έχει *τοπικό* ή *σχετικό μέγιστο* στο $x=x_0$, αν $f''(x_0)<0$.

Έχει *τοπικό* ή *σχετικό ελάχιστο* στο $x=x_0$, αν $f''(x_0)>0$.

Αν $f''(x_0)=0$, αλλά και σε όλες τις περιπτώσεις, εφαρμόζουμε τον γενικό κανόνα:
Αν στο σημείο $x=x_0$ η συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(2n-1)}(x_0)=0 \qquad \text{ενώ} \qquad f^{(2n)}(x_0)\neq 0$$

για κάποιο θετικό ακέραιο *n*, τότε η συνάρτηση $f(x)$:

Έχει *τοπικό* ή *σχετικό μέγιστο* στο $x=x_0$, αν $f^{(2n)}(x_0)<0$.

Έχει *τοπικό* ή *σχετικό ελάχιστο* στο $x=x_0$, αν $f^{(2n)}(x_0)>0$.

Παράδειγμα 7

Η κίνηση βλήματος στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης δίνεται από τις σχέσεις:

$$x(t)=x_0+(\upsilon_0\cos\theta)t \qquad y(t)=y_0+(\upsilon_0\sin\theta)t-\tfrac{1}{2}gt^2$$

όπου t είναι ο χρόνος, και τα υπόλοιπα μεγέθη είναι σταθερά. Να βρεθεί το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φθάσει το σώμα.

Το ύψος δίνεται από το $y(t)$. Η μέγιστή του τιμή δίνεται από τη συνθήκη $dy/dt=0$. Έτσι,

$$\frac{dy}{dt}=(\upsilon_0\sin\theta)-gt=0, \qquad t_{\text{μέγ}}=\frac{\upsilon_0}{g}\sin\theta \quad\Rightarrow\quad y_{\text{μέγ}}=y_0+\frac{\upsilon_0^2}{2g}\sin^2\theta\ .$$

Ας σημειωθεί ότι το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει από τη σχέση $dy/dx=(dy/dt)/(dx/dt)=0$.

2.4 Το διαφορικό μιας συνάρτησης

Για μια μικρή μεταβολή dx στο x, η μεταβολή στην $f(x)$ είναι περίπου ίση με

$$df = f'(x)\,dx \;. \tag{2.10}$$

Η προσέγγιση αυτή είναι τόσο πιο ακριβής όσο πιο μικρό είναι το dx. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι η ακριβής σχέση για τη μεταβολή Δf στην $f(x)$, που οφείλεται σε μια μεταβολή Δx στο x, βρίσκεται με τη βοήθεια των σειρών Τέηλορ και είναι ίση με:

$$\Delta f = f'(x)\,\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)\,(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)\,(\Delta x)^3 + \ldots \tag{2.11}$$

Για μικρό Δx, είναι $\Delta f \approx f'(x)\,\Delta x$.

Το df, οριζόμενο από την Εξ. (2.10), ονομάζεται *διαφορικό* της $f(x)$.

Αν οι $f,\ g,\ u$ και υ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις ανάμεσα στα διαφορικά τους:

1. $d[f(x)+g(x)] = df + dg = f'(x)dx + g'(x)dx = \left[f'(x)+g'(x)\right]dx$. (2.12)
2. $d[f(x)g(x)] = f\,dg + g\,df = [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]dx$. (2.13)
3. $d\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\} = \dfrac{g\,df - f\,dg}{g^2} = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}dx, \quad g(x)\neq 0$. (2.14)
4. Αν $f = f(u)$ και $u = u(x)$, τότε $\quad df = \dfrac{df}{du}du = \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dx}dx = f'(u)du = f'(u)\,u'(x)dx$. (2.15)

   Αν $f = f(u)$, $u = u(\upsilon)$ και $\upsilon = \upsilon(x)$, τότε $\quad df = \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{d\upsilon}\dfrac{d\upsilon}{dx}dx$. (2.16)
5. Αν είναι $x = f(t)$ και $y = g(t)$, τότε $\quad dy = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}dx = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}dx$. (2.17)

Παράδειγμα 8

Να βρεθεί η μεταβολή στο εμβαδόν ενός κύκλου αν η ακτίνα του μεταβληθεί από r σε $r + dr$.

Το εμβαδόν είναι $S = \pi r^2$. Επομένως $dS = 2\pi r\,dr$.

Παράδειγμα 9

Αν η ακτίνα μιας σφαίρας μετρηθεί ως r με σφάλμα δr, ποιο είναι το σφάλμα στο εμβαδόν της επιφάνειας και στον όγκο της σφαίρας όπως αυτά υπολογίζονται από την τιμή του r που μετρήθηκε;

Επειδή το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας δίνεται από τη σχέση $S = 4\pi r^2$, το διαφορικό του S είναι

$$dS = 8\pi r dr \,.$$

Επομένως, το σφάλμα στο εμβαδόν είναι $\delta S \approx 8\pi r \delta r$.

Ο όγκος της σφαίρας δίνεται από τη σχέση $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Το διαφορικό του V είναι

$$dV = 4\pi r^2 dr \,.$$

Επομένως, το σφάλμα στον όγκο είναι $\delta V \approx 4\pi r^2 \delta r$.

2.5. Οι παράγωγοι των κοινών συναρτήσεων

$y(x)$	$\dfrac{dy}{dx}$	$y(x)$	$\dfrac{dy}{dx}$
C = σταθ.	0	$\dfrac{1}{\sin x}$	$-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$
x^n	$n x^{n-1}$	$\sin^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\cos^{-1} x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\tan^{-1} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cot^{-1} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\tanh x$	$\mathrm{sech}^2 x$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\coth x$	$-\mathrm{csch}^2 x$

Επέκταση του Πίνακα: Ο Πίνακας μπορεί να επεκταθεί, με την αντικατάσταση $x \to ax+b$ στην $y(x)$. Η ίδια αντικατάσταση πρέπει να γίνει και στην έκφραση που δίνεται στον Πίνακα για την $\dfrac{dy}{dx}$, η οποία πρέπει επίσης να πολλαπλασιαστεί επί a. Για παράδειγμα,

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^n = an(ax+b)^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}\sin(ax+b) = a\cos(ax+b) \qquad \frac{d}{dx}\ln(ax+b) = \frac{a}{ax+b}$$

2.6 Η διαφορική μορφή των νόμων της Φυσικής

Ο σπουδαστής της Φυσικής θα διαπιστώσει, καθώς εμβαθύνει στην αυστηρή μαθηματική διατύπωση των νόμων της, ότι οι νόμοι αυτοί αποκτούν αυξημένη γενικότητα όταν διατυπώνονται στη λεγόμενη *διαφορική μορφή* τους. Αυτή η μορφή συνδέει τα φυσικά μεγέθη και τις διάφορες παραγώγους των (χωρικές, χρονικές, ή άλλες) μέσω εξισώσεων οι οποίες ισχύουν για κάθε τιμή του χρόνου και σε κάθε σημείο μιας περιοχής.

Για παράδειγμα, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, στη μορφή $F = ma$, προσφέρει περιορισμένες δυνατότητες εφαρμογής. Αν όμως γίνει κατανοητό ότι ο νόμος ισχύει σε κάθε χρονική στιγμή, με τις αντίστοιχες στιγμιαίες τιμές των φυσικών μεγεθών, και ότι η επιτάχυνση είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο, η εξίσωση παίρνει μια γενικότερη μορφή. Έτσι, για κίνηση πάνω στον άξονα των x, η ταχύτητα είναι $$\upsilon_x = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{2.18}$$

και η επιτάχυνση $$a_x = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta \upsilon_x}{\delta t} = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}\ . \tag{2.19}$$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει τη μορφή:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = F_x \qquad \text{ή} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \tag{2.20}$$

όπου F_x είναι η συνιστώσα x της δύναμης που ασκείται πάνω στη μάζα m.

Το πλεονέκτημα αυτής της μαθηματικής διατύπωσης είναι ότι διαθέτουμε τις μαθηματικές μεθόδους για να λύσουμε την εξίσωση για την ταχύτητα $\upsilon_x(t)$ ή τη θέση $x(t)$ της μάζας ακόμη και όταν η δύναμη δεν είναι σταθερή, αλλά είναι συνάρτηση της θέσης, του χρόνου, της ταχύτητας κλπ. Εάν, όπως συμβαίνει για παράδειγμα στη θεωρία της σχετικότητας, η μάζα μεταβάλλεται, η εξίσωση κίνησης πρέπει να γραφτεί ως: $F_x = \dfrac{dp_x}{dt} = \dfrac{d(m\upsilon_x)}{dt}$.

Παράδειγμα 10

Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των x δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου t, από τη σχέση:

$$x(t) = 4 + 3t^2 - 2\sin 5t$$

(σε m όταν ο χρόνος μετριέται σε s). Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου.

Η ταχύτητα του σημείου είναι: $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt} = 0 + 3\cdot 2t - 2\cdot 5\cos 5t = 6t - 10\cos 5t$ m/s .

Η επιτάχυνσή του είναι: $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = 6 - (-10\cdot 5\sin 5t) = 6 + 50\sin 5t$ m/s^2 .

Παράδειγμα 11

Οι συντεταγμένες ενός σημείου πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t, από τις σχέσεις:

$$x(t) = 4\sin 5t \qquad y(t) = 4\cos 5t$$

(σε m όταν ο χρόνος μετριέται σε s). Να βρεθούν:

(α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

(α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας του σημείου είναι:

$$\upsilon_x(t) = 20\cos 5t \qquad \upsilon_y(t) = -20\sin 5t \quad \text{m/s}$$

Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης του σημείου είναι:

$$a_x(t) = -100\sin 5t \qquad a_y(t) = -100\cos 5t \quad \text{m/s}^2$$

(β) Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου είναι:

$$|\upsilon| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(20\cos 5t)^2 + (-20\sin 5t)^2} = 20 \quad \text{m/s}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου είναι:

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-100\sin 5t)^2 + (-100\cos 5t)^2} = 100 \quad \text{m/s}^2$$

(γ) Από τις δύο σχέσεις για τις συντεταγμένες του σημείου, απαλείφουμε το t υψώνοντας στο τετράγωνο και αθροίζοντας:

$$x^2 + y^2 = (4\sin 5t)^2 + (4\cos 5t)^2 = 4^2 \ \mathrm{m}^2 .$$

Το σωματίδιο κινείται πάνω στον κύκλο $(0,\ 4\ \mathrm{m})$, με ταχύτητα και επιτάχυνση των οποίων τα μέτρα είναι σταθερά.

Η 'ελεύθερη' χρήση των διαφορικών στη Φυσική

Στη Φυσική συνήθως γίνεται απευθείας χρήση των διαφορικών στην εξαγωγή της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα φαινόμενο. Θα επιδείξουμε τη μέθοδο με ένα παράδειγμα, για να μας δοθεί η ευκαιρία να σχολιάσουμε τη διαδικασία που ακολουθείται.

Παράδειγμα 12

Ο νόμος της ραδιενεργού διάσπασης: Αν η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου για διάσπαση ενός πυρήνα κάποιου ισοτόπου είναι σταθερή και ίση με λ, να βρεθεί η εξίσωση που δίνει τον αριθμό των επιζώντων πυρήνων σε ένα δείγμα συναρτήσει του χρόνου.

Αν η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου για διάσπαση ενός πυρήνα του ισοτόπου είναι η ίδια για όλους τους πυρήνες, είναι σταθερή και ίση με λ, τότε, από τους $N(t)$ τέτοιους πυρήνες που υπάρχουν σε ένα δείγμα τη χρονική στιγμή t, σε ένα μικρό χρονικό διάστημα δt θα διασπαστούν περίπου $\lambda N \delta t$ πυρήνες. Η μεταβολή στο $N(t)$ θα είναι $\delta N \approx -\lambda N \delta t$ (αρνητική γιατί το $N(t)$ μειώνεται). Επομένως $\dfrac{\delta N}{\delta t} \approx -\lambda N$. Επειδή ο αριθμός N είναι συνήθως μεγάλος, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η $N(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και να πάρουμε το όριο καθώς $\delta t \to 0$, οπότε βρίσκουμε ότι

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \ . \tag{2.21}$$

Η συνήθης διαδικασία είναι, για εξοικονόμηση χρόνου, να χρησιμοποιούμε διαφορικά απευθείας, υπονοώντας τη διαδικασία λήψης ορίων που παρουσιάσαμε πιο πάνω. Συγκεκριμένα επιχειρηματολογούμε ως εξής:

Από τους $N(t)$ πυρήνες του ισοτόπου που υπάρχουν σε ένα δείγμα τη χρονική στιγμή t, σε ένα μικρό χρονικό διάστημα dt θα διασπαστούν περίπου $\lambda N dt$ πυρήνες. Η μεταβολή στο $N(t)$ θα είναι $dN = -\lambda N dt$ (αρνητική γιατί το $N(t)$ μειώνεται). Επομένως,

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \ .$$

Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης δίνει το $N(t)$. Αν N_0 είναι ο αριθμός των πυρήνων που υπήρχαν αρχικά $(t = 0)$, η λύση αυτής της εξίσωσης είναι

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} , \tag{2.22}$$

όπως μπορεί να επαληθευτεί με παραγώγιση, για να βρεθεί ξανά η Εξ. (2.21):

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N \ .$$

Κάποιες άλλες εξισώσεις της Φυσικής που μπορούμε να διατυπώσουμε σε διαφορική μορφή ακόμη και με στοιχειώδεις γνώσεις του διαφορικού λογισμού είναι:

Η εξίσωση φόρτισης και εκφόρτισης πυκνωτή: Αν το ρεύμα προς έναν οπλισμό του πυκνωτή είναι $I(t)$, το φορτίο $Q(t)$ αυτού του οπλισμού μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{dQ}{dt} = I \quad . \tag{2.23}$$

Αν το ρεύμα στο κύκλωμα είναι, για παράδειγμα, $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$, θα πρέπει να είναι

$$Q(t) = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad . \tag{2.24}$$

Μπορεί να επαληθευτεί ότι τα $Q(t)$ και $I(t)$ ικανοποιούν την Εξ. (2.23).

Ο νόμος του Φάραντέι για την επαγωγή: Αν η ροή Φ του μαγνητικού πεδίου μέσα από έναν αγώγιμο βρόχο είναι συνάρτηση του χρόνου, η επαγόμενη στον βρόχο ηλεκτρεγερτική δύναμη δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο του Φάραντέι, από τη σχέση:

$$\text{Η.Ε.Δ.} = E = -\frac{d\Phi}{dt} \quad . \tag{2.25}$$

Η εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή: Η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη της μετατόπισης, $F_x = -kx$, και επομένως ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = -kx \qquad \text{ή} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \, . \tag{2.26}$$

Η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)$ (2.27)

όπου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, και τα A και ϕ είναι σταθερές που καθορίζονται από τις συνθήκες του συγκεκριμένου προβλήματος. Αυτό μπορεί να επαληθευτεί με διπλή παραγώγιση του $x(t)$ και αντικατάσταση στην Εξ. (2.26).

Προβλήματα

1 Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των x δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου t, από τη σχέση:

$$x(t) = 2 + 3t + 4e^{-5t}$$

(σε m όταν ο χρόνος είναι σε s). Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου, και η επιτάχυνσή του. Δείξτε ότι η ταχύτητα του σημείου τείνει σε μια σταθερή τιμή.

2 Οι συντεταγμένες ενός σημείου που κινείται πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t, από τις σχέσεις:

$$x(t) = 3\sin 5t \qquad y(t) = 4\cos 5t$$

(σε m όταν ο χρόνος είναι σε s). Να βρεθούν:

(α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

3 Η μαγνητική ροή που διαρρέει ένα βρόχο είναι: $\Phi(t) = 3 - 2\sin 3t + 5t$ (σε μονάδες S.I.) όπου t είναι ο χρόνος. Να βρεθεί η επαγόμενη στον βρόχο ηλεκτρεγερτική δύναμη $E(t)$.

Βιβλιογραφία

M. R. Spiegel, *Ανώτερα Μαθηματικά*. ΕΣΠΙ, Αθήνα 1982. Κεφ. 4.